Capitolo 8

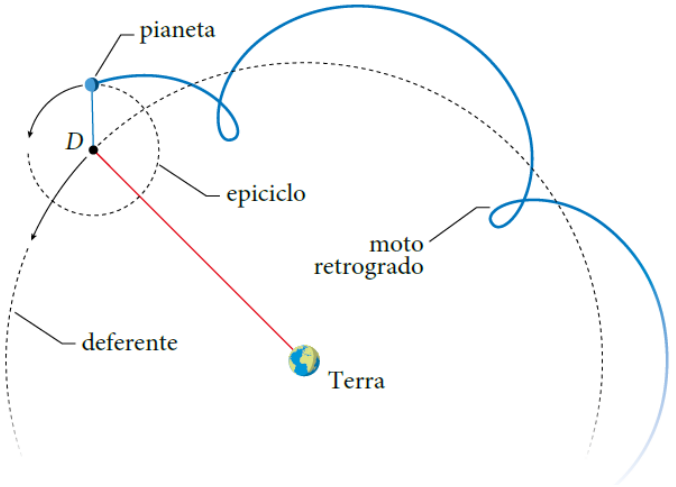
La gravitazione

Il modello geocentrico

Fino a tutto il Medioevo, il modello cosmologico di riferimento era il modello *geocentrico*, sviluppato da **Claudio Tolomeo** (II secolo d.C.) sulla base delle idee di **Aristotele** (IV secolo a.C.).
Nel modello geocentrico, la Terra è al centro dell'Universo e il Sole, la Luna e gli altri pianeti le orbitano attorno.

Secondo Aristotele i corpi celesti dovevano compiere moti circolari uniformi, senza inizio, mutamenti né fine. Osservati dalla Terra, però, i pianeti compiono talvolta un moto *retrogrado*, cioè tornano indietro per un tratto, incompatibilmente con il modello aristotelico.

Per spiegare il moto retrogrado, Tolomeo ipotizzò che ogni pianeta si muovesse su una circonferenza, detta *epiciclo*, e che il centro di questa circonferenza disegnasse attorno alla Terra una seconda circonferenza di raggio più grande, detta *deferente*.



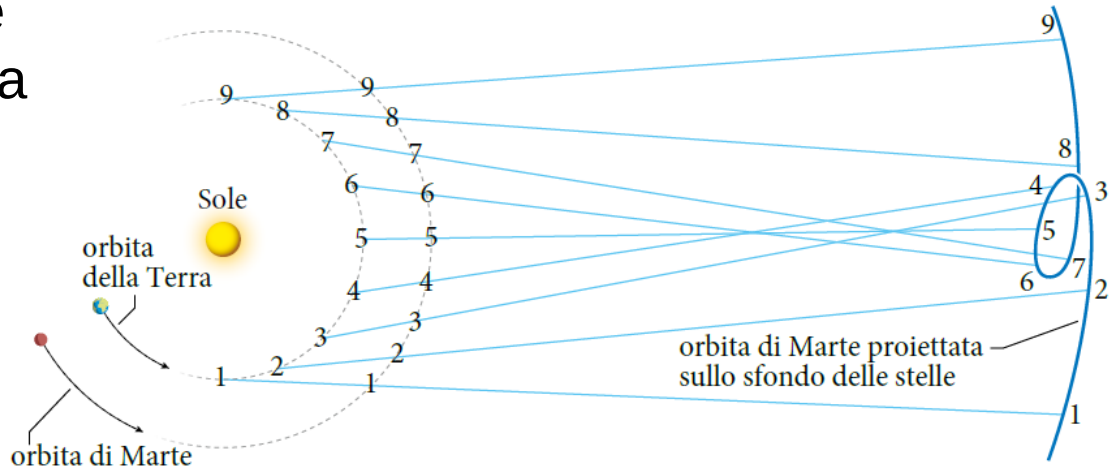
continua

Il modello eliocentrico

Il modello *eliocentrico*, in cui il Sole è posto al centro dell'Universo e gli altri pianeti gli ruotano attorno, fu proposto da **Niccolò Copernico** (1473-1543) e successivamente perfezionato da **Giovanni Keplero** (1571-1630).

Nel modello eliocentrico di Copernico, il moto retrogrado di un pianeta è dovuto a un effetto prospettico causato dal moto relativo della Terra e del pianeta osservato.

Per esempio, Marte percorre la sua orbita, esterna a quella della Terra, più lentamente rispetto alla Terra. Proiettato sullo sfondo delle stelle, il moto di Marte ci appare retrogrado quando la Terra «sorpassa» Marte.



La prima legge di Keplero

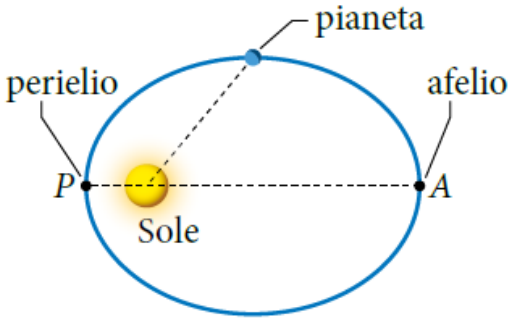


Il modello di Copernico riproduceva le caratteristiche generali dei moti dei pianeti ed era più semplice di quello geocentrico, ma non mostrava un accordo quantitativo soddisfacente con le osservazioni astronomiche.

Questo difetto fu corretto da Keplero, che per primo sostenne che le orbite dei pianeti fossero **ellissi** anziché circonferenze.

La **prima legge di Keplero** stabilisce che le orbite descritte dai pianeti attorno al Sole sono ellissi con il Sole in uno dei due fuochi.

La posizione in cui un pianeta è più vicino al Sole si chiama *perielio*; quella in cui è più lontano si chiama *afelio*.



continua

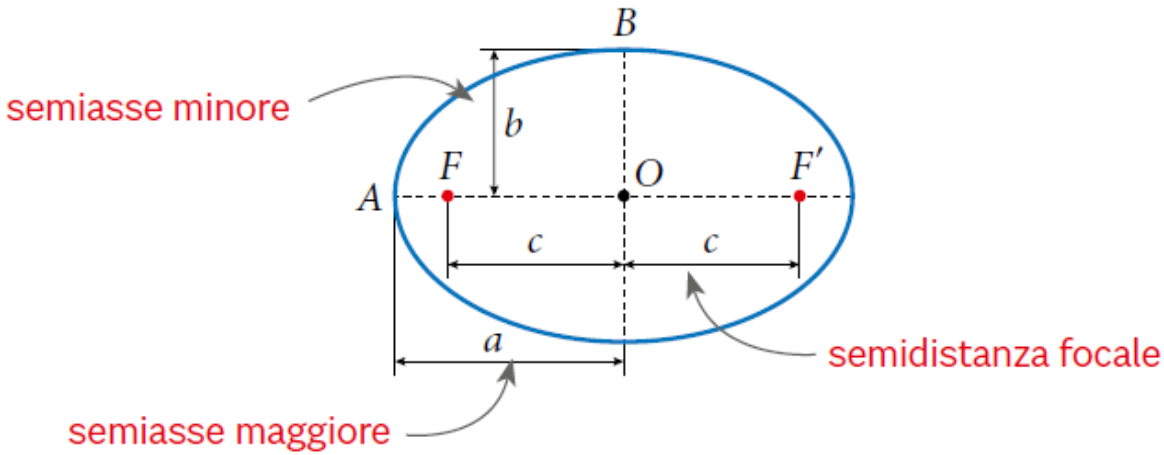
La prima legge di Keplero

L'ellisse è la figura piana definita come il luogo dei punti in cui è costante la somma delle distanze da due punti fissi F e F', detti *fuochi*.

Il punto medio del segmento $\overline{FF'}$ che ha i due fuochi per estremi è il *centro* O dell'ellisse.

La distanza $c = \overline{OF} = \overline{OF'}$ è chiamata *semidistanza focale*.

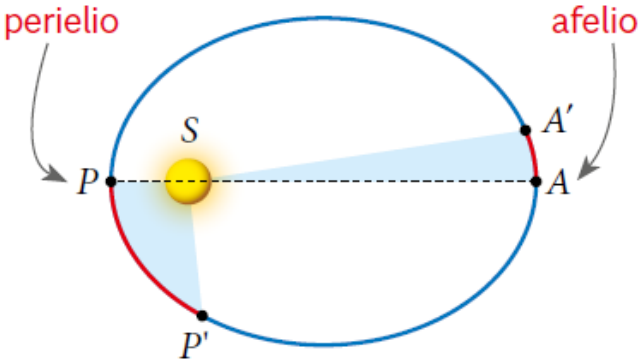
La distanza massima a tra l'ellisse e il suo centro O è detta *semiasse maggiore* e la distanza minima $b = \overline{OB}$ è detta *semiasse minore*.



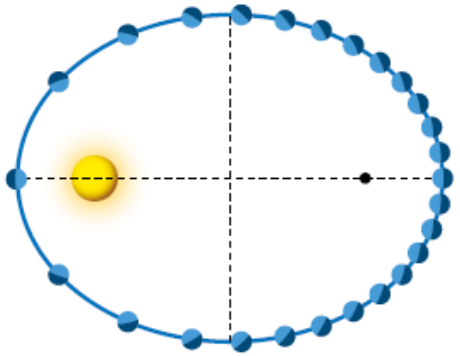
La seconda legge di Keplero

La **seconda legge di Keplero** stabilisce che il raggio vettore che va dal Sole a un pianeta spazza aree uguali in intervalli di tempo uguali.

■ Il pianeta percorre in intervalli di tempo uguali gli archi PP', più lungo, e AA', più breve. Le superfici SPP' e SAA' hanno la stessa area; quindi, la velocità del pianeta attorno al perielio è maggiore della sua velocità all'afelio.

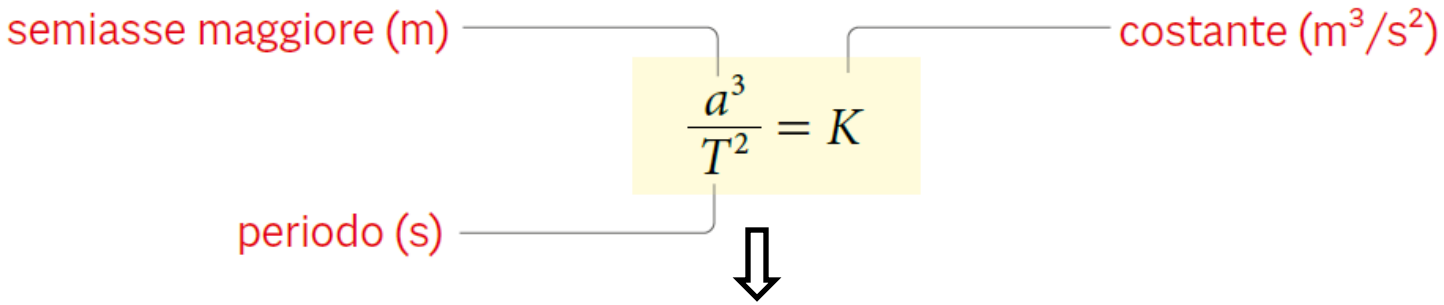


■ Infatti, se indichiamo la posizione del pianeta lungo l'orbita a intervalli di tempo regolari, vediamo che, allontanandosi dal perielio, il pianeta percorre archi via via più brevi.



La terza legge di Keplero

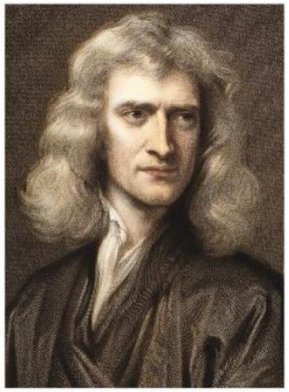
La **terza legge di Keplero** stabilisce che il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore a dell'orbita e il quadrato del periodo di rivoluzione T è lo stesso per tutti i pianeti:



Più un pianeta è distante dal Sole, maggiore è il tempo che impiega per completare la propria orbita.

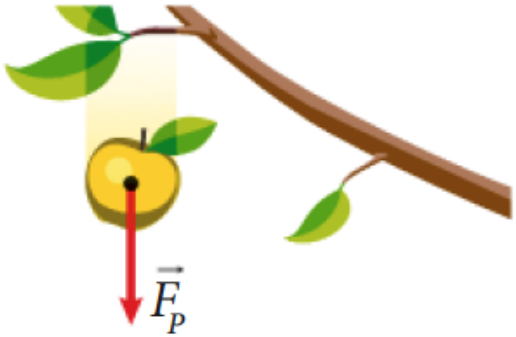
- Le leggi di Keplero sono formulate per le orbite dei pianeti attorno al Sole, ma valgono anche per quelle dei satelliti attorno ai pianeti.
- La costante K che compare nella terza legge di Keplero dipende dal corpo celeste attorno al quale avviene il moto orbitale.

La legge di gravitazione universale



Isaac Newton (1643-1727) introdusse una forza, detta **forza gravitazionale**, che si esercita *a distanza* e ipotizzò che la forza gravitazionale che lega la Luna alla Terra abbia la stessa natura di quella che fa cadere una mela sulla superficie terrestre.





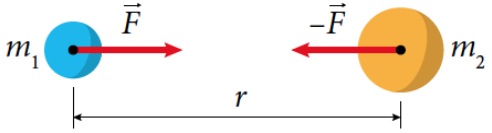
Nell'idea di Newton questa forza è *universale* e fa sì che due corpi qualsiasi, tanto due stelle quanto due granelli di sabbia, si attraggano.

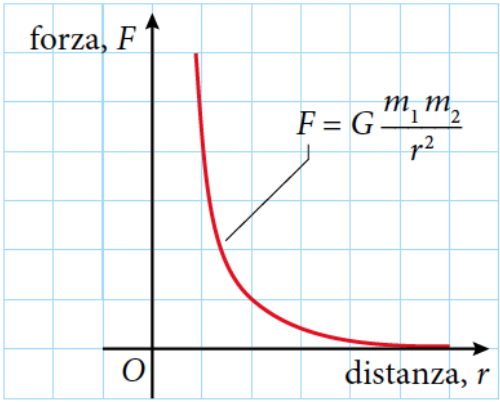
La forza gravitazionale tra due punti materiali

Secondo la legge di gravitazione universale (1687) di Newton:

la forza di attrazione tra due punti materiali di masse m_1 e m_2 separati da una distanza r è:

- direttamente proporzionale a ciascuna massa;
- inversamente proporzionale al quadrato della distanza r;
- diretta lungo la retta che congiunge i due punti materiali;
- per il terzo principio della dinamica, tale che la forza di m_1 su m_2 è uguale in modulo ma opposta in verso alla forza di m_2 su m_1.





prima massa (kg)

modulo della forza gravitazionale (N)

costante di gravitazione universale ($N \cdot m^2/kg^2$)

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

seconda massa (kg)

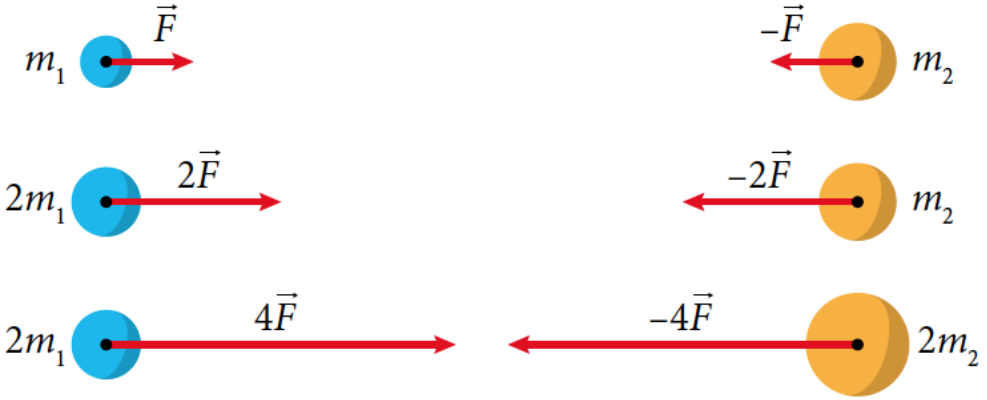
distanza (m)

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

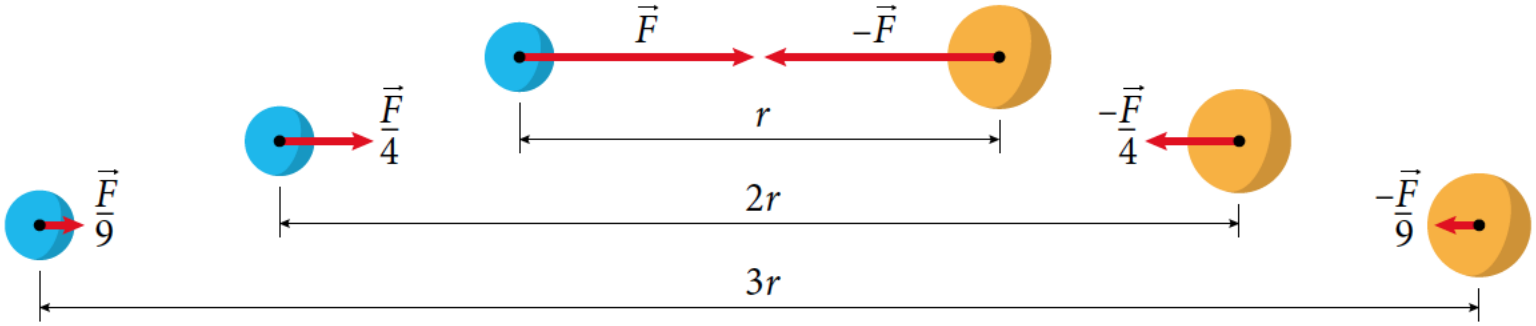
continua

La forza gravitazionale tra due punti materiali

- Tenendo fissa la distanza tra i due punti materiali, se una delle due masse raddoppia, la forza gravitazionale raddoppia.



- Tenendo fisse le masse dei due punti materiali, se la loro distanza raddoppia, la forza gravitazionale diventa quattro volte più piccola.



La forza gravitazionale tra due corpi sferici di grandi dimensioni

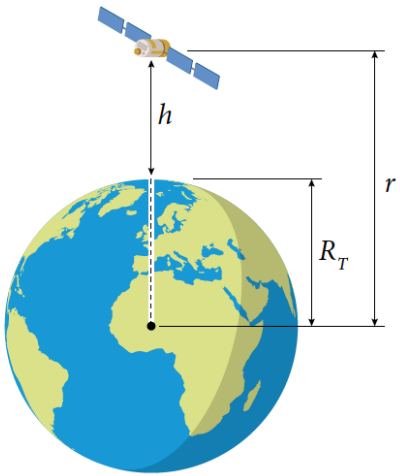
La legge di gravitazione universale è formulata nel caso di masse puntiformi.

Tuttavia, se la massa di un corpo è uniformemente distribuita in un volume sferico, allora è comunque possibile applicare la legge di gravitazione universale, cioè:

i corpi sferici esercitano e subiscono forze gravitazionali come se avessero tutta la massa concentrata nel centro.

ESEMPIO: la massa della Terra ha, all'incirca, una simmetria sferica. Per calcolare la forza gravitazionale fra la Terra e un satellite, si considera la distanza del satellite (un punto materiale) dal centro della Terra:

$$F = G\frac{mM_T}{(R_T + h)^2}$$



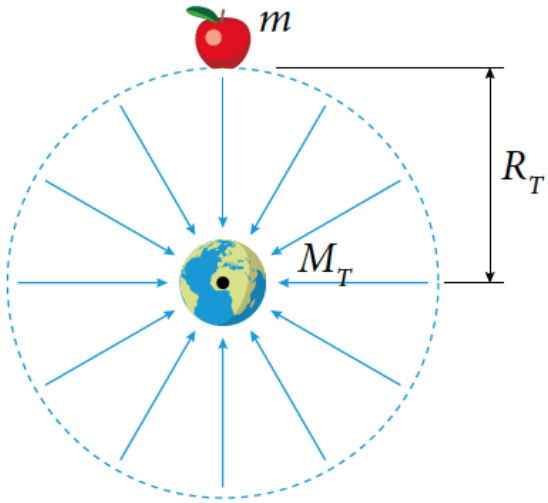
L’esperimento di Cavendish

La prima misura della costante gravitazionale G fu ottenuta da **Henry Cavendish** (1731-1810) nel 1798.

L’esperimento con cui Cavendish misurò G si basa sul fatto che:

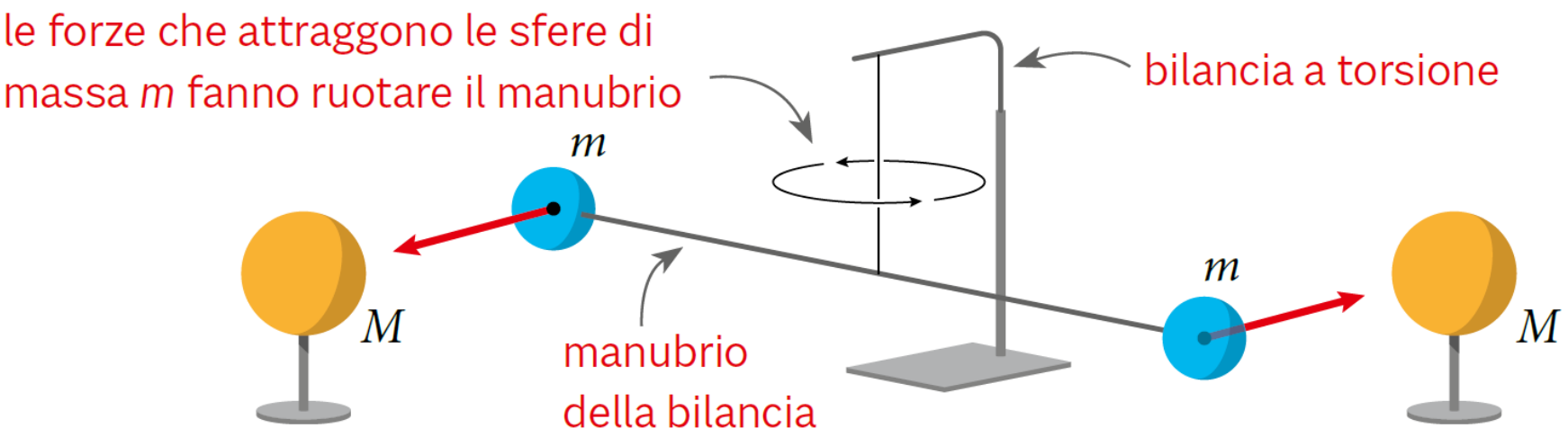
la forza-peso $\vec{F}_P$ è la forza gravitazionale con cui la Terra attrae un corpo posto vicino alla sua superficie.

Cavendish eseguì le sue misurazioni con una *bilancia a torsione*, costituita da un manubrio orizzontale che sostiene alle sue estremità due sfere, appeso a un filo.
Grazie a un preciso sistema di lettura degli spostamenti angolari, questo strumento rileva con grande sensibilità le forze che lo fanno ruotare.



continua

L’esperimento di Cavendish



Dall’esperimento di Cavendish si ottengono:

- il valore della **costante di gravitazione** oggi accettato:

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

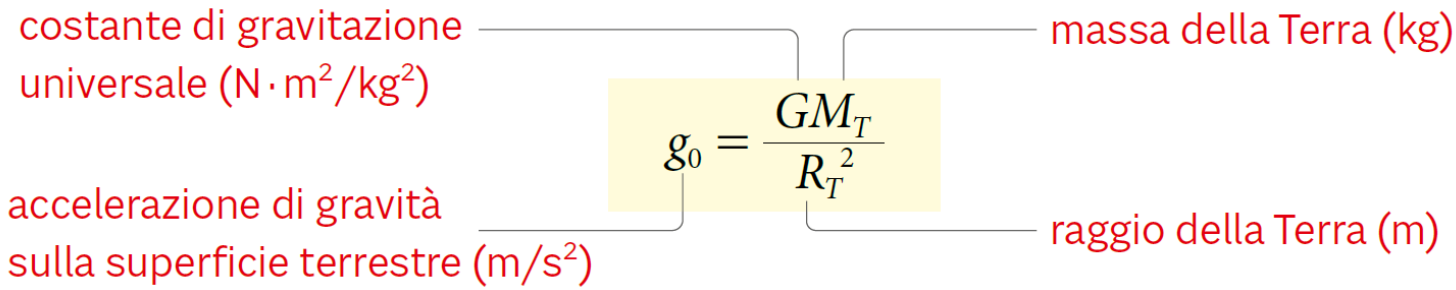
- il valore della **massa della Terra**: $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$

L’accelerazione di gravità sulla superficie terrestre

La forza-peso di un corpo di massa m posto sulla superficie terrestre equivale alla forza gravitazionale esercitata dalla Terra su quell’oggetto. Considerando quindi come distanza r il raggio della Terra R_T:

$$F_P = m\left(\frac{GM_T}{R_T^2}\right)$$

Per il secondo principio della dinamica, ciò significa che, in media, l’accelerazione di gravità sulla superficie terrestre vale:



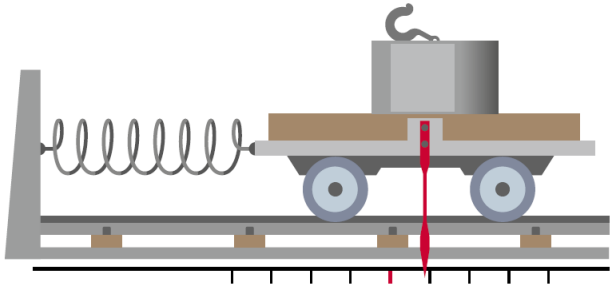
cioè g_0 dipende dalla massa e dal raggio della Terra.

Massa inerziale VS massa gravitazionale

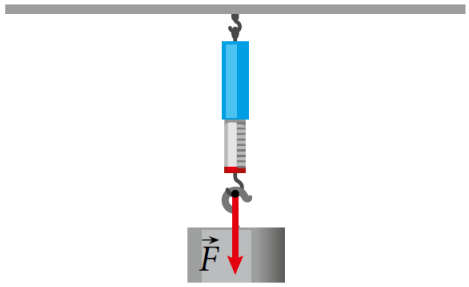
- Secondo principio della dinamica: $\vec{F} = m\vec{a}$ ➡ m: **massa inerziale**
- Legge di gravitazione: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ ➡ m_1, m_2: **massa gravitazionale**

La massa inerziale e quella gravitazionale sono due grandezze fisiche concettualmente diverse:

■ La **massa inerziale** di un corpo è definita tramite il carrello delle masse, che misura la difficoltà che si ha ad accelerarlo [→ **cap. 3, par. 5**].



■ La **massa gravitazionale** dello stesso corpo è misurata dal dinamometro, che determina il modulo della forza con cui la Terra lo attrae.



Gli esperimenti mostrano che la massa gravitazionale di un corpo è direttamente proporzionale alla sua massa inerziale.

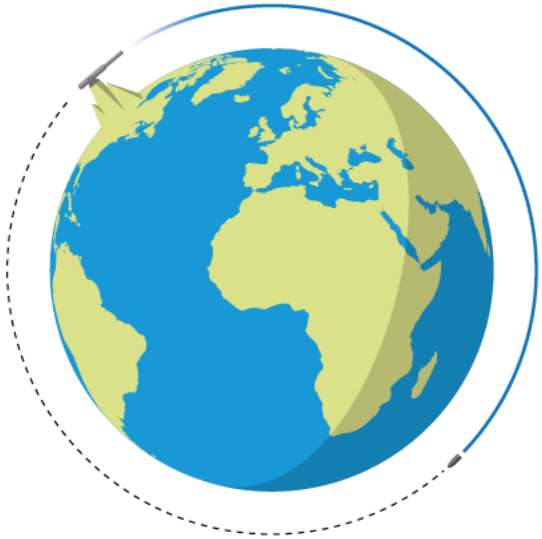
Il moto dei satelliti

Se si spara un proiettile in orizzontale da un punto molto alto e si continua ad aumentare la sua velocità iniziale, a un certo punto il proiettile non atterra più sulla Terra: diventa un *satellite*.

Un satellite artificiale è un proiettile lanciato con una velocità tale da non farlo più atterrare.

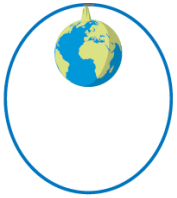
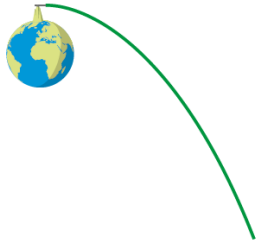
Un satellite in orbita è un proiettile che cade *intorno* alla Terra anziché verso di essa. La forza gravitazionale attira di continuo il satellite verso la Terra, ma il satellite non la raggiunge mai.

Per mettere in orbita un satellite si usa un razzo, che si inclina lentamente mentre sale e imprime così al satellite la velocità orizzontale necessaria.



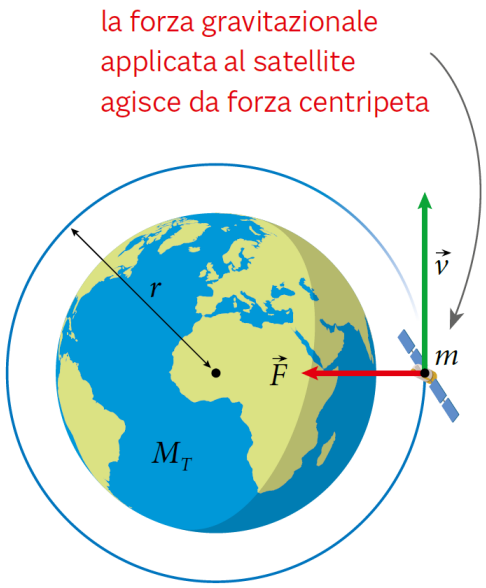
I tipi di orbite

A seconda della velocità di lancio, un proiettile lanciato in orizzontale dalla superficie di un pianeta può compiere moti con orbite diverse.

Tipo di orbita o traiettoria	Velocità di lancio
Circolare 	La velocità orizzontale minima per cui un oggetto, partendo dalla superficie di un pianeta, entra in orbita. Questo valore è unico e dipende dalla massa e dalle dimensioni del pianeta: per la Terra è 7,91 km/s.
Ellittica 	Tutti i valori di velocità orizzontale compresi tra quello che corrisponde a una traiettoria circolare e quello che corrisponde a una traiettoria parabolica.
Parabolica 	La velocità orizzontale per cui un oggetto, lasciata la superficie di un pianeta, se ne allontana, rallentando fino a fermarsi a una distanza infinita. Questo valore è unico e dipende dalla massa e dalle dimensioni del pianeta: per la Terra è 11,2 km/s.
Iperbolica 	Tutti i valori di velocità orizzontale maggiori di quello che corrisponde a una traiettoria parabolica.

Le orbite circolari

La forza gravitazionale $\vec{F}$ che agisce su un satellite in orbita circolare attorno alla Terra è sempre ortogonale alla velocità $\vec{v}$ del satellite, agendo come una forza *centripeta* in un moto circolare uniforme.



Per determinare la velocità $\vec{v}$ del satellite, applichiamo il secondo principio della dinamica:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

e sostituiamo al modulo della forza l'espressione della forza gravitazionale e al modulo dell'accelerazione l'espressione dell'accelerazione centripeta:

$$G\frac{\cancel{m}M_T}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

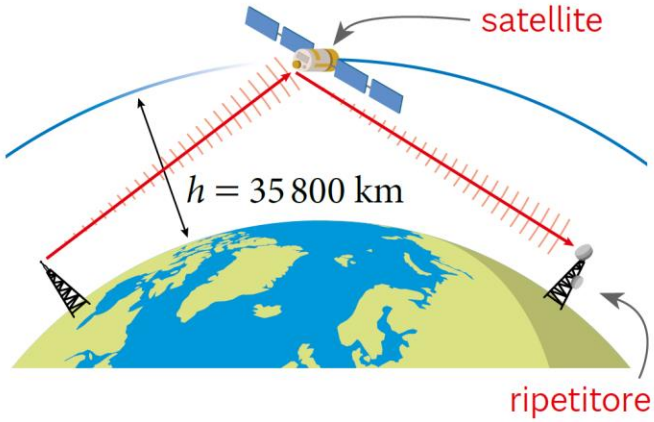
I satelliti geostazionari

Un **satellite geostazionario** percorre un'orbita equatoriale circolare con un periodo uguale al periodo di rotazione della Terra; quindi è *fermo* rispetto alla superficie terrestre.

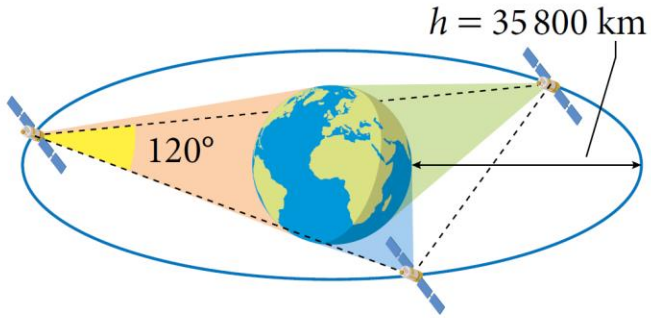
Affinché la condizione sul tempo di rivoluzione sia soddisfatta, il satellite deve avere la seguente distanza dal centro della Terra:

$$r = R_T + h = 6{,}37 \times 10^6 \text{ m} + 3{,}58 \times 10^7 \text{ m} = 4{,}22 \times 10^7 \text{ m}$$

■ Un satellite geostazionario riceve i segnali televisivi di una stazione emittente, li amplifica e li emette di nuovo verso la Terra.



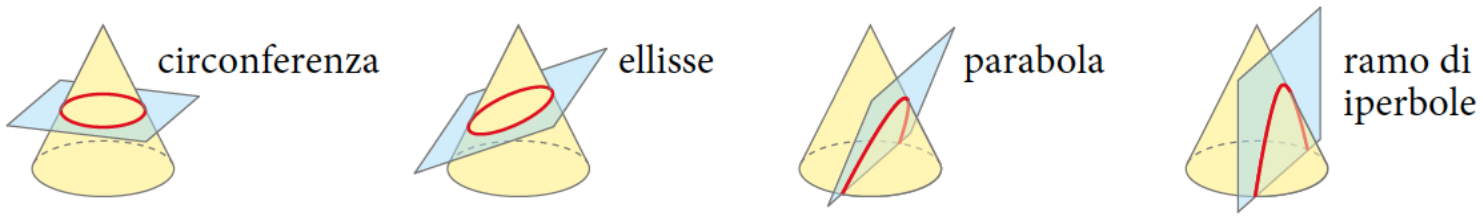
■ Bastano tre satelliti geostazionari, posti a 120° l'uno rispetto all'altro, per inviare segnali su quasi tutta la superficie terrestre.



La deduzione delle leggi di Keplero

La legge di gravitazione universale di Newton consente di dimostrare la validità delle leggi di Keplero, che risultano esatte se si considera un sistema costituito da due soli corpi, il cui centro di massa è posto in uno dei due fuochi dell'orbita ellittica.
Se uno corpo è di massa molto maggiore dell'altro, la sua posizione coincide, in buona approssimazione, con il centro di massa e, quindi, con il fuoco dell'orbita. Questa condizione è valida nel caso del Sistema Solare.

- La prima legge di Keplero è spiegata dalle proprietà matematiche della legge di gravitazione universale: siccome la forza di gravità decresce con il quadrato della distanza, le traiettorie possibili sono le curve *coniche*, così dette perché ottenute tagliando con un piano la superficie di un cono:



continua

La deduzione delle leggi di Keplero

- La seconda legge di Keplero è una conseguenza della conservazione del momento angolare. Al perielio e all'afelio, la velocità $\vec{v}$ della Terra è perpendicolare al raggio vettore $\vec{r}$ che ha origine nel centro del Sole. Il momento angolare della Terra rispetto al centro del Sole ha quindi modulo:

$$L = M_T r v$$

Dati astronomici relativi al moto orbitale terrestre		
	Afelio	**Perielio**
Distanza dal Sole	$r_A = 1{,}52 \times 10^{11}\ \text{m}$	$r_P = 1{,}47 \times 10^{11}\ \text{m}$
Modulo della velocità	$v_A = 2{,}93 \times 10^{4}\ \text{m/s}$	$v_P = 3{,}03 \times 10^{4}\ \text{m/s}$

AFELIO: $$L_A = M_T r_A v_A = (5{,}97 \times 10^{24}\,\text{kg})(1{,}52 \times 10^{11}\,\text{m})(2{,}93 \times 10^{4}\,\text{m/s}) =$$
$$= \underline{2{,}66 \times 10^{40}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}$$

PERIELIO: $$L_P = M_T r_P v_P = (5{,}97 \times 10^{24}\,\text{kg})(1{,}47 \times 10^{11}\,\text{m})(3{,}03 \times 10^{4}\,\text{m/s}) =$$
$$= \underline{2{,}66 \times 10^{40}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}$$

continua

La deduzione delle leggi di Keplero

Per semplicità, dimostriamo la terza legge di Keplero ipotizzando che le orbite dei pianeti siano circolari. Nel moto circolare uniforme si ha:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Utilizzando l'espressione della velocità per un satellite $v^2 = \frac{GM}{r}$ con M al posto di M_T troviamo che:

$$\frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

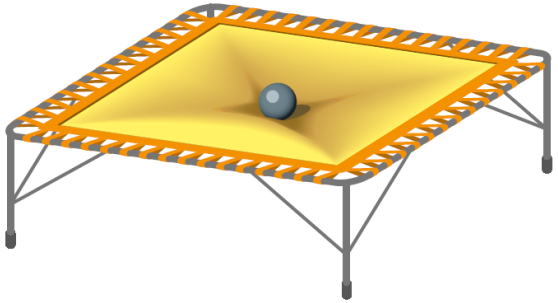
Questo risultato vale anche per le orbite ellittiche, a condizione di considerare r come la distanza media del pianeta dal Sole, che coincide con il semiasse maggiore a dell'orbita.

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad \longrightarrow \quad K = \frac{GM}{4\pi^2}$$

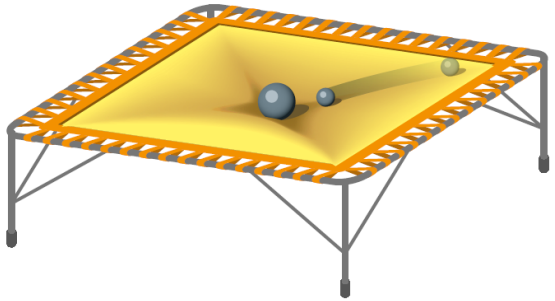
Il campo gravitazionale

Di norma, nei fenomeni di meccanica, due corpi devono entrare in contatto per interagire con una forza. Eppure, la forza di attrazione gravitazionale si esercita a distanza e non richiede alcun contatto. Come fa allora il Sole ad attrarre i pianeti? Inoltre, come fa questa forza ad agire in modo istantaneo a grandi distanze?

■ Se poniamo una sfera pesante al centro di un telo elastico ben teso, nel telo si crea un avvallamento.



■ Una sfera più leggera, appoggiata a una certa distanza, rotola fino al centro seguendo la curvatura del telo.



La faccia superiore del telo è lo spazio (bidimensionale) in cui possono muoversi le due sfere e in questo spazio la sfera piccola si comporta come se fosse attratta da quella grande.

continua

Il campo gravitazionale

La sfera leggera non subisce l'azione *diretta* della sfera pesante, ma risponde alla deformazione dello spazio prodotta attorno alla propria posizione.

In modo analogo, la grande massa del Sole sembra attrarre i pianeti a distanza; invece, il Sole modifica lo spazio e, a sua volta, lo spazio modificato determina il moto dei pianeti.

Il **campo gravitazionale** del Sole è quindi un modo per descrivere la modificazione dello spazio.

- I corpi massivi creano nello spazio un campo gravitazionale.
- Ogni corpo massivo, istante per istante, risente di com'è fatto il campo nella propria posizione.

Campo VS azione a distanza

Se la forza gravitazionale, che dipende dalla reciproca posizione delle masse interagenti, fosse un'*azione a distanza*, allora essa si dovrebbe propagare istantaneamente in ogni punto dello spazio, causando un'istantanea attrazione di masse anche infinitamente distanti l'una dall'altra.

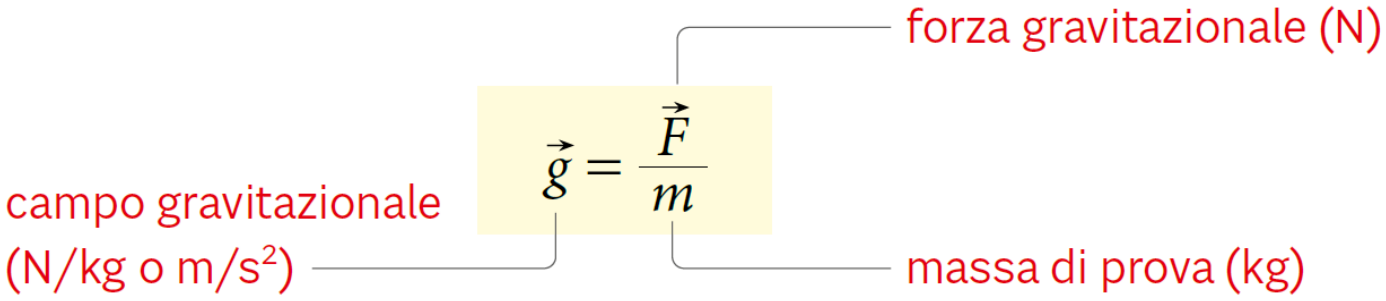
Secondo la *teoria della relatività generale* di **Albert Einstein** (1879-1955), invece, la perturbazione gravitazionale prodotta in un punto O dello spazio arriva in un diverso punto P con un certo ritardo, perché nessun tipo di segnale può propagarsi con una velocità infinita: i segnali viaggiano al massimo alla velocità $c = 3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$ della luce nel vuoto.

Il concetto di azione a distanza è in conflitto con la teoria della relatività generale, che invece è compatibile con il concetto di campo.

Il vettore campo gravitazionale

Una **massa di prova** è una massa che mostra l'esistenza di un campo gravitazionale nel punto in cui viene collocata.

Per descrivere il campo gravitazionale generato da una massa M, serve una grandezza fisica che dipenda solamente da M e dalla distanza da essa. Perciò la grandezza fisica adatta è il **vettore campo gravitazionale**, definito come il rapporto tra la forza gravitazionale e la massa di prova:



Il campo gravitazionale in un punto è l'*accelerazione* che viene impressa dalla forza gravitazionale a qualunque corpo posto in quel punto.

Il campo gravitazionale di un punto materiale

Vogliamo determinare il campo gravitazionale generato in un punto P da un singolo punto materiale di massa M, che si trova a distanza r da P. Sulla massa di prova m posta in P agisce una forza gravitazionale $\vec{F}$. Il vettore $\vec{g}$ ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{F}$, e ha modulo:

costante di gravitazione universale ($N \cdot m^2/kg^2$)

massa (kg)

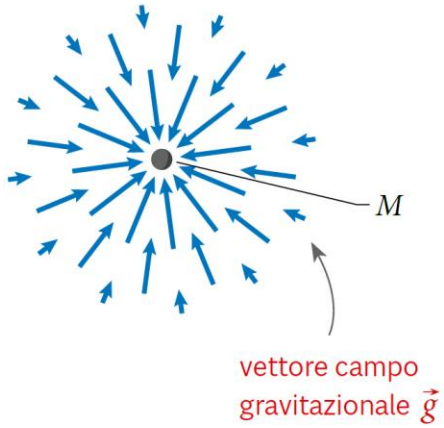
$$g = G\frac{M}{r^2}$$

modulo del campo gravitazionale (m/s^2)

distanza (m)

Il campo gravitazionale in un punto P dipende solo dalle masse da cui è generato e dalle loro posizioni rispetto a P.

Il campo gravitazionale $\vec{g}$ attorno a un punto materiale di massa M è descritto da vettori rivolti verso il punto materiale e con modulo minore (inversamente proporzionale al quadrato della distanza) nelle zone più lontane.



Il campo gravitazionale della Terra

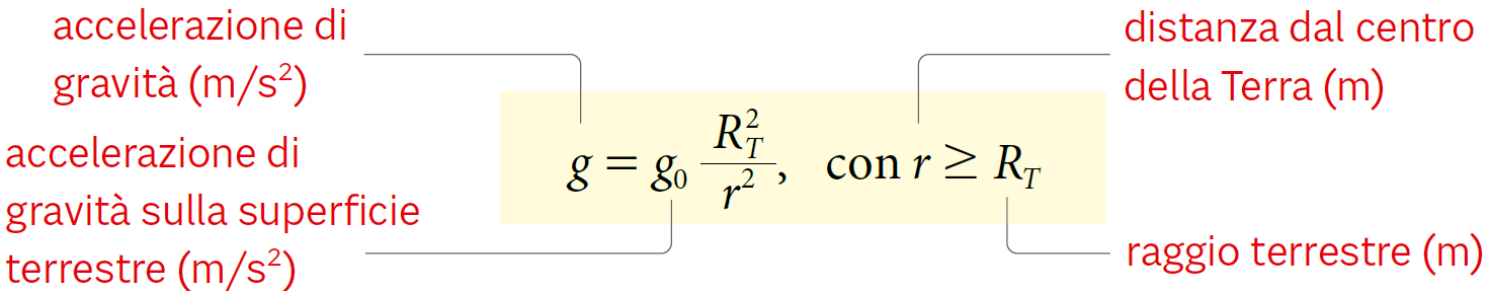
I corpi a simmetria sferica esercitano e subiscono la forza gravitazionale come se avessero tutta la massa nei loro centri.

Il modulo del campo gravitazionale della Terra in un punto sulla sua superficie ($r = RT$) è dato da:

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

ed esprime il valore dell'accelerazione di gravità g_0 in prossimità della superficie terrestre.

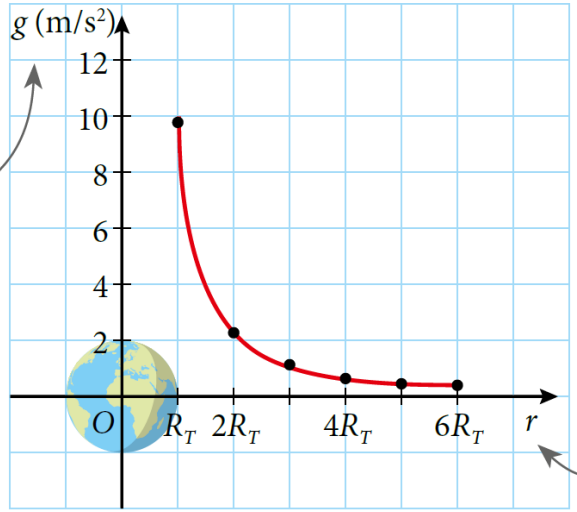
Per un punto situato a una distanza r dal centro della Terra superiore o uguale al raggio terrestre R_T abbiamo che:



continua

Il campo gravitazionale della Terra

Grafico del campo gravitazionale terrestre in funzione della distanza dal centro della Terra:



g è il campo gravitazionale della Terra, ossia l'accelerazione di gravità

r è la distanza dal centro della Terra

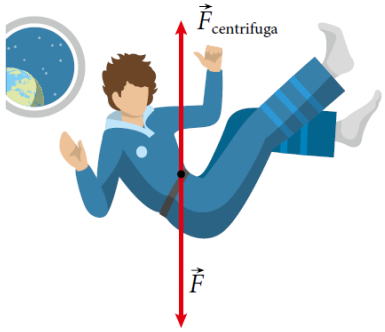
Tuttavia, il valore misurato di g varia anche con la latitudine (per meno di una parte su 100), per due ragioni:

- perché la Terra non ha una simmetria sferica perfetta, ma è schiacciata ai poli e rigonfia all'Equatore;
- a causa della forza centrifuga apparente, che viene percepita come una piccola variazione della forza-peso.

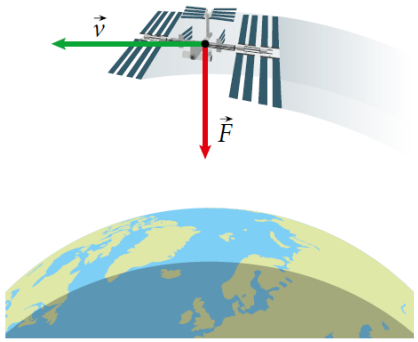
Perché gli astronauti in orbita non avvertono il peso

Sulla ISS, la forza di attrazione gravitazionale esercitata sugli astronauti è minore di quando sono sulla Terra, ma non trascurabile. Come mai allora li vediamo fluttuare come se la gravità non ci fosse? Il motivo è che osserviamo il loro moto rispetto alla ISS, che è in orbita attorno alla Terra, ed è quindi un sistema in rotazione.

■ Rispetto alla ISS, sugli astronauti è applicata la forza di attrazione gravitazionale $\vec{F}$, diretta verso il centro della Terra, e la forza centrifuga apparente $\vec{F}_{\text{centrifuga}}$, diretta verso l'alto. Le due forze sono uguali e opposte, per cui la forza totale è nulla e gli astronauti sono fermi rispetto alla ISS.



■ Rispetto alla Terra, sugli astronauti è applicata la forza di attrazione gravitazionale $\vec{F}$, diretta verso il centro della Terra. Gli astronauti sono in moto insieme alla ISS. La forza gravitazionale è quindi una forza centripeta, che produce una accelerazione centripeta e il moto attorno al nostro pianeta.



L’energia potenziale gravitazionale

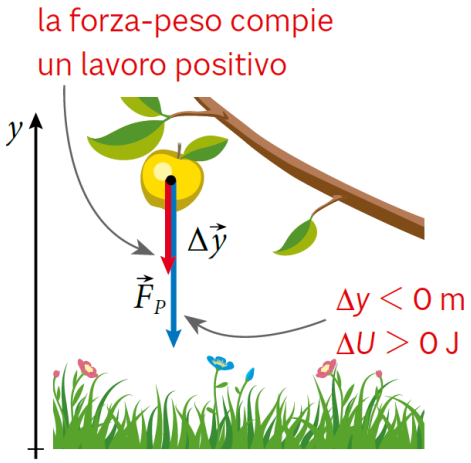
La forza-peso $\vec{F}_P$ che agisce su un corpo di massa m è una forza conservativa, e dunque ammette un’energia potenziale U definita da:

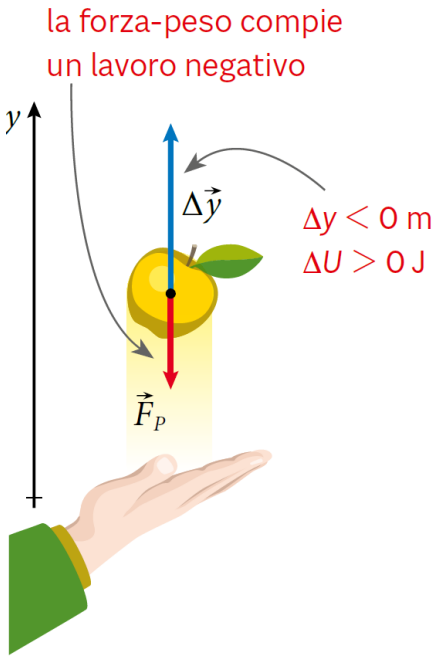
$$U = mg_0y$$

dove y è l’altezza calcolata rispetto a un livello zero arbitrario.

Il lavoro W della forza-peso è tale che $W = -\Delta U$, da cui:

- se il corpo cade verso il suolo ($\Delta y < 0$ m), cioè se il lavoro di $\vec{F}_P$ è positivo, allora U diminuisce;
- se il corpo si innalza ($\Delta y < 0$ m), $\vec{F}_P$ fa un lavoro negativo e U aumenta.



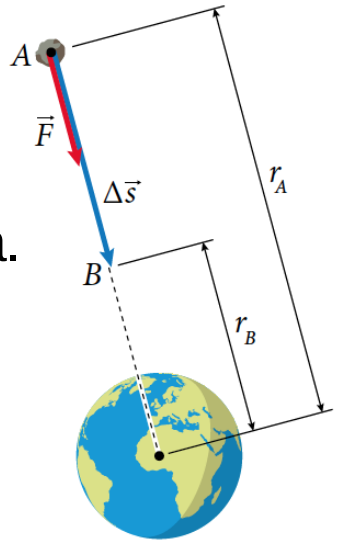


continua

L’energia potenziale gravitazionale della Terra e di un corpo lontano

Lavoro per uno spostamento da un punto A a distanza r_A a un punto B a distanza r_B:

$$W_{A\to B} = G\frac{mM_T}{r_B} - G\frac{mM_T}{r_A}$$



Il lavoro $W_{A\to B}$ dipende da A e da B ma non dalla traiettoria.
Ciò significa che la forza gravitazionale è conservativa.
La variazione dell’energia potenziale a essa associata è:

$$\Delta U = -W_{A\to B} = G\frac{mM_T}{r_A} - G\frac{mM_T}{r_B}$$

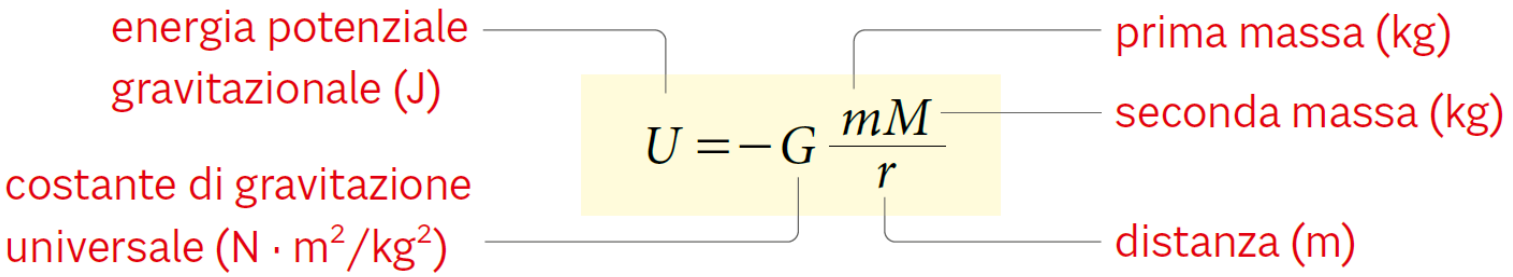
L’energia potenziale gravitazionale U è maggiore se la distanza r tra i corpi interagenti è maggiore, cioè U è una funzione crescente di r.

Fissando il livello zero all’infinito si ha che:

$$U = -G\frac{mM_T}{r}$$

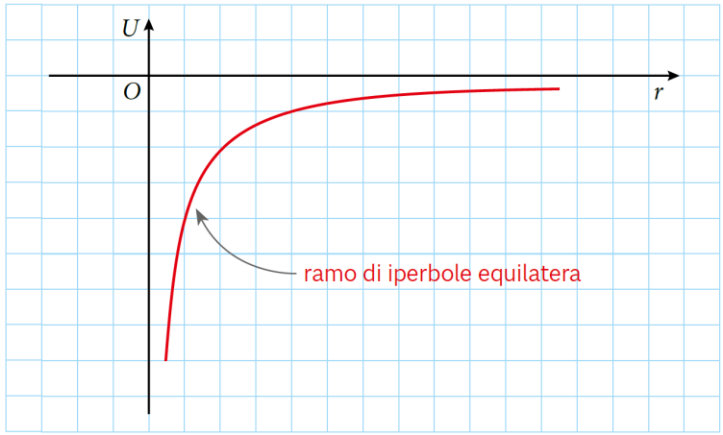
L'energia potenziale gravitazionale di due punti materiali

Con la convenzione di fissare lo zero all'infinito, l'energia potenziale gravitazionale U di un sistema composto da un corpo di massa m e uno di massa M separati da una distanza r risulta:



Se aumenta la distanza r, aumenta anche l'energia potenziale U.

Il grafico di U al variare di r è un ramo di iperbole equilatera e mostra che U è sempre negativa e tende a zero al tendere di r all'infinito.



Un caso limite: l'energia potenziale della forza-peso

- Energia potenziale di un corpo di massa m a un'altitudine h sul livello del mare:

$$U_B = -G\frac{mM_T}{R_T + h}$$

- Energia potenziale di un corpo di massa m sulla superficie terrestre:

$$U_A = -G\frac{mM_T}{R_T}$$

- Variazione di energia potenziale:

$$\Delta U = U_B - U_A = -\frac{GmM_T}{R_T + h} - \left(-\frac{GmM_T}{R_T}\right) = GmM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right) =$$

$$= GmM_T\,\frac{\cancel{R_T} + h - \cancel{R_T}}{R_T\,(R_T + h)} = \frac{GmM_T h}{R_T\,(R_T + h)}$$

continua

Un caso limite: l'energia potenziale della forza-peso

- In prossimità della superficie terrestre possiamo approssimare $R_T + h \approx R_T$, e quindi il risultato precedente diventa:

$$\Delta U \approx \frac{GmM_T h}{R_T^2} = m\left(\frac{GM_T}{R_T^2}\right)h$$

- Ricordando che:

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

  abbiamo trovato che:

quando si calcolano le *variazioni* di energia potenziale nelle vicinanze della superficie terrestre, la formula $U = mg_0 y$ e la formula generale dell'energia potenziale gravitazionale danno lo stesso risultato.

La conservazione dell'energia nell'interazione gravitazionale

A seconda della velocità di lancio, un proiettile lanciato dalla Terra può:

- allontanarsi infinitamente;
- entrare in orbita;
- ricadere sulla superficie.


SpaceX/Unsplash

Se si esclude lo spessore dell'atmosfera terrestre (che è comunque molto sottile rispetto alle distanze astronomiche), durante il proprio moto il proiettile è soggetto esclusivamente alla forza gravitazionale, che è conservativa, e dunque l'energia meccanica si conserva:

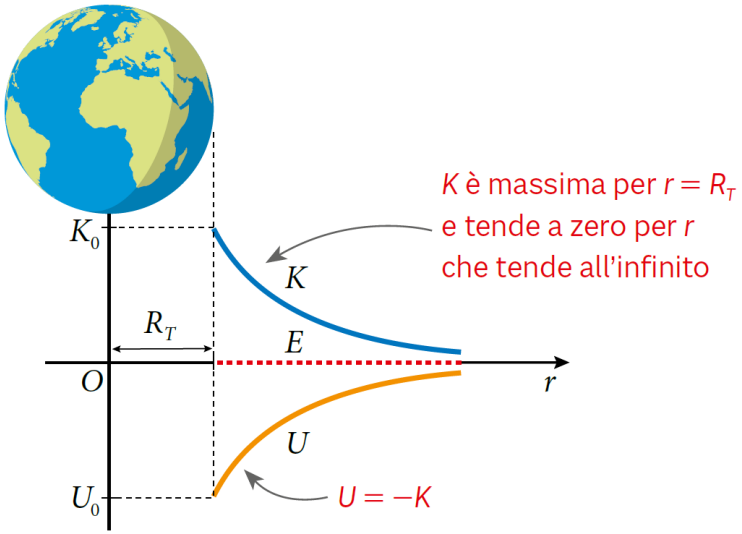
un proiettile e la Terra si possono modellizzare come un sistema in cui l'energia meccanica si conserva.

L’energia per abbandonare la Terra

Se il proiettile ha velocità sufficiente per allontanarsi per sempre dalla Terra, potrà raggiungere una distanza talmente grande che l’energia potenziale del sistema sarà sostanzialmente nulla.

Poiché il proiettile non può avere energia cinetica negativa, dalla legge di conservazione dell’energia meccanica si ha che:

un proiettile abbandona la Terra se la sua energia meccanica E è nulla o positiva al momento del lancio.



La condizione $E = 0$ si realizza se $K = -U$. Se indichiamo l’energia potenziale al momento del lancio con $U_0 = -GM_Tm/R_T$, allora l’energia cinetica iniziale è:

$$K_0 = -U_0 = \frac{GM_Tm}{R_T}$$

La velocità di fuga

La **velocità di fuga** è il minimo valore v_{fuga} della velocità iniziale che consente a un proiettile di abbandonare un pianeta ed è il valore che rende nulla l'energia meccanica.

Considerando il pianeta Terra, dal confronto dell'espressione dell'energia cinetica iniziale $K_0 = \frac{1}{2}mv_{\text{fuga}}^2$ con quella trovata prima otteniamo:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_{\text{fuga}}^2 = G\frac{\cancel{m}M_T}{R_T} \quad \Longrightarrow \quad v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

La velocità di fuga dalla Terra è:

$$v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2\,(6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)\,(5{,}97 \times 10^{24}\,\text{kg})}{6{,}37 \times 10^{6}\,\text{m}}} = 11{,}2\,\text{km/s}$$

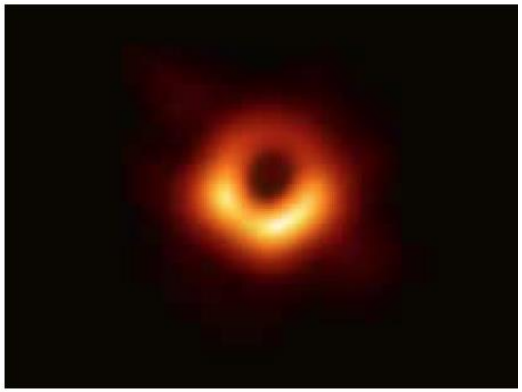
In generale, la velocità di fuga da un corpo celeste di forma sferica, di massa M e raggio R, è:

$$v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Il buco nero

Le stelle più grandi terminano il proprio ciclo di esistenza con un collasso gravitazionale. Durante questo processo il raggio R della stella diminuisce, ma la sua massa M resta costante, quindi la velocità di fuga v_{fuga} aumenta.

Se R si riduce a sufficienza, v_{fuga} può anche diventare maggiore della velocità c della luce nel vuoto. Però, secondo la teoria della relatività di Einstein, nessuna particella materiale può raggiungere la velocità c e nessun segnale può oltrepassarla.



In tal caso, la stella si è trasformata in un **buco nero**, un «pozzo» gravitazionale da cui niente può allontanarsi, neanche la luce.

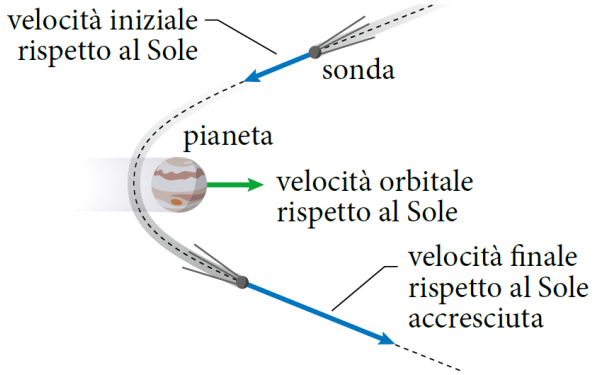
Il valore critico R_S fino a cui una stella di massa M deve restringere il suo raggio per diventare un buco nero è detto **raggio di Schwarzschild**.

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

L’effetto fionda

Quando una sonda spaziale si avvicina a un pianeta, l’attrazione gravitazionale fa aumentare la velocità della sonda. Una volta che la sonda oltrepassa il pianeta, l’attrazione gravitazionale la rallenta.

Nel sistema di riferimento del Sole, il pianeta ha una velocità orbitale non nulla; se il pianeta sta andando incontro alla sonda in avvicinamento, ne deriva che il modulo della velocità finale della sonda rispetto al Sole deve essere maggiore di quello iniziale.



È come se la sonda ricevesse una spinta, chiamata **effetto fionda**, che la devia e che ne accresce la velocità.

Nel sistema di riferimento del Sole, la sonda viene rilanciata dal pianeta con una velocità maggiore di quella con cui è arrivata, a condizione che il pianeta si muova incontro alla sonda nella fase di avvicinamento.